Una rigorosa dimostrazione del teorema dei numeri primi

Autore : ***Prof. Santo Giovanni Torrisi***
Contact: sgtorrisi@virgilio.it
Dirigente del Liceo Scientifico " C. Caminiti " di S.Teresa di Riva (ME)

In questo lavoro si dimostra il teorema dei numeri primi nella forma logaritmo integrale: $\pi(n) \sim Li(n) = \int_2^n [1/\ln(x)] \cdot dx$
utilizzando una uguaglianza asintotica,valida per l'insieme dei numeri primi, uguaglianza che presenta una interessante analogia con una relazione valida per l'insieme dei numeri interi.

Si considerino tutti i numeri primi fino a p_n: p_1 , p_2 , p_3 , ... , p_n. Si prendano a piacere h di questi numeri,con $h < n$, ciascuno dei quali innalzato ad un esponente intero $x_i > 0$ e se ne esegua il prodotto che indicheremo con $\pi_h p_i^{x_i}$ .Allo stesso modo si operi con i rimanenti $k = n - h$ primi p_j ciascuno dei quali innalzato all'esponente intero $x_j > o$. Il prodotto sarà indicato con $\pi_j^{x_j}$.
Si esegua ora la somma o la differenza p tra le due precedenti quantità: $p = \pi_h^{x_i} \pm \pi_k p_j^{x_j}$.
Se con una opportuna scelta di h, k, x_i , x_j si ottiene $p < p_{n+1} * p_{n+2}$ allora p o è primo o è una potenza di un numero primo. Infatti ,per come è stato ottenuto, p non può avere come fattore nessuno dei primi fino a p_n e quindi se $p < p_{n+1} * p_{n+2}$ esso è primo o potenza di un numero primo (si veda in appendice).
Con la procedura indicata si possono ottenere tutti i numeri primi p tali che: $p_n < p < p_{n+1} * p_{n+2}$.

Si riportano di seguito alcuni esempi:

a₁) $p_1 = 2; p_2 = 3$;
$2+3 = 2^3 - 3 = 3^2 - 2^2 = 2^5 - 3^3 = 5$; $3^3 - 2 = 2^4 + 3^2 = 5^2$; $2^2 + 3 = 3^2 - 2 = 2^4 - 3^2 = 7$;
$3^3 - 2^4 = 2^3 + 3 = 3^2 + 2 = 11$; $2^4 - 3 = 2^2 + 3^2 = 2^8 - 3^5 = 13$; $2^3 + 3^2 = 3^4 - 2^6 = 17$;
$2^4 + 3 = 3^3 - 2^3 = 19$; $3^3 - 2^2 = 2^5 - 3^2 = 23$; $3^3 + 2 = 2^5 - 3 = 29$; $3^3 + 2^2 = 31$;
Il primo numero composto che si ottiene è: $p_{n+1} * p_{n+2} = 5 * 7 = 35 = 2^5 + 3 = 2^3 + 3^3$;

a₂) $p_1 = 2; p_2 = 3; p_3 = 5$;
$2*5-3 = 2^2*3-5 = 3*5-2^3 = 5^2 - 2*3^2 = 3^3*5 - 2^7 = 7$
$3^2 + 2^3*5 = 2^3*3 + 5^2 = 2^6 - 3*5 = 3^2*5 + 2^2 = 7^2$;
$2*3+5 = 3*5-2^2 = 2^2*5-3^2 = 3*5^2 - 2^6 = 11$; $3^4 + 2^3*5 = 2^8 - 3^3*5 = 11^2$;
$2*5+3 = 3*5-2 = 5^2 - 3*2^2 = 3^2*5 - 2^5 = 13$; $2^4*3^2 + 5^2 = 2^5*5 + 3^2 = 13^2$;
$3*5+2 = 2^2*5-3 = 3^3 - 2*5 = 2^5 - 3*5 = 17$; $3^2*5^2 + 2^6 = 17^2$;

$3*5+2^2=2*5+3^2=5^2-2*3=2^3*3-5=2^6-3^2*5=19;\quad 2*3^5-5^3=19^2;$

$2^2*5+3=2*3^2+5=3*5+2^3=2*5^2-3^3=23;\qquad 3^6-2^3*5^2=23^2;$

$2^3*3+5=2^2*5+3^2=5^3-2^5*3=29;\qquad 2^3*3^3+5^4=29^2;$

$2*3+5^2=2^4+3*5=3^4-2*5^2=5*2^3-3^2=2^8-3^2*5^2=31;$

$2^2*3+5^2=2^3*5-3=2*5+3^3=5*3^2-2^3=37;\qquad 2^7*5+3^6=37^2;$

$2^2*3^2+5=2*5^2-3^2=5*3^2-2^2=41;\qquad 2^6*5^2+3^4=41^2;$

$2*3^2+5^2=3*5^2-2^5=3^2*5-2=43;\qquad 2*5^2-3=2^2*5+3^3=2^5+3*5=47;$

$2^3+3^2*5=2*5^2+3=53;\quad 2*5^2+3^2=3*5^2-2^4=59;\quad 2^2*3^2+5^2=3^4-2^2*5=61;$

$5*2^3+3^3=67;\quad 3*5^2-2^2=71;\quad 2^4*3+5^2=73;$

Il primo numero composto che si ottiene è:

$p_{n+1}*p_{n+2}=7*11=77=3*5^2+2=2^4*5-3=2*5^2+3^3=2^5+3^2*5$

a3) $p_1=2; p_2=3; p_3=5; p_4=7;$

$3*7-2*5=2^2*3*5-7^2=5*7-2^3*3=3^4-2*5*7=11;$

$3*5*7+2^4=2^2*5^2+3*7=5^2*7-2*3^3=5^4-2^3*3^2*7=11^2;$

$2^2*7-3*5=3^2*7-2*5^2=3*5^2*7-2^9=3^4*5-2^3*7^2=13;$

$3*5*7+2^6=2*3*7^2-5^3=13^2;$

$2*3*7-5^2=5*7-2*3^2=3^2*5-2^2*7=2^3*3^2*5-7^3=17;$

$2^3*5*7+3^2=2^4*3*5+7^2=17^2;$

$5*7-2^4=2*3^3-5*7=7^2-2*3*5=3*5^2-2^3*7=19;$

$3*5*7+2^8=3^4+2^3*5*7=19^2;$

$2*3*5-7=5*7-3*2^2=3^2*7-2^3*5=3^3*5-2^4*7=2^7-3*5*7=23;$

$2^5*3*5+7^2=2^3*3^2*7+5^2=23^2;$

$5*7-2*3=2*7+3*5=2*5^2-3*7=5^3-3*2^5=3^6-2^2*5^2*7=3^3*7-2^5*5=29;$

$2^4*5^2+3^2*7^2=29^2;$

$2*5+3*7=3^2*5-2*7=2^4*5-7^2=31;\qquad 5^4+2^4*3*7=31^2;$

$2*3*5+7=2*3*7-5=2^2*5^2-3^2*7=3^3*5-2*7^2=2^3*3^2-5*7=$

$=2^4*7-3*5^2=2^3*5*7-3^5=5^4-2^2*3*7^2=37;\qquad 2^4*3^2+5^2*7^2=37^2;$

$2*3+5*7=2^2*5+3*7=2*3^2*5-7^2=5^3-2^2*3*7=3*5*7-2^6=2^3*7-3*5=41;$

$7^4-2^4*3^2*5=41^2;$

$2^2*7+3*5=3^2*7-2^2*5=2*5*7-3^3=43;\quad 2^3*3^2*5^2+7^2=3^6+5*2^5*7=43^2;$

$2^2*3+5*7=3*5^2-2^2*7=2*3*7+5=47;\qquad 2^4*3^3*5+7^2=47^2;$

$3^2*7-2*5=2*7^2-3^2*5=2*3^2+5*7=53;$

$3^2*5+2*7=3^2*5*7-2^8=2^2*5^3-3^2*7^2=59;$

$2^3*5+3*7=2^3*7+5=2*5*7-3^2=2*5^3-3^3*7=61;$

$2*3*7+5^2=2^2*3*5+7=2*5*7-3=67;$

$2^3*7+3*5=2^4*3^4-5^2\cdot 7^2=2*5^2+3*7=2^3*3*5-7^2=3^4-2*5=71;$

$3^2\cdot 7+2*5=3*5*7-2^5=3^3*7^2-2*5^4=73;$

$2*3*5+7^2=2^2*5^2-3*7=5^2*7-2^5*3=79;\quad 2^4*3+5*7=5^3-2*3*7=83;$

$2*3^3+5*7=3*5*7-2^4=89;\qquad 3*5*7-2^3=2*5\cdot 7+3^3=2^2*3^5-5^3*7=97;$

$2*3^2*7-5^2=2^3*7+3^2*5=3*5*7-2^2=101;\quad 3*5*7-2=2^3*5+3^2*7=103;$

$3*5*7+2=2*3^2*5^2-7^3=107;\quad 3*5*7+2^2=2^2*3*5+7^2=3^3*7-2^4*5=109;$

$3*5*7+2^3=2^3*3*5-7=3^2*5^2-2^4*7=113;\quad 5^2*7-2^4*3=2^4*7+3*5=127;$

$2^5*3+5*7=2^2*3^2\cdot 5-7^2=131;\quad 2^2*5*7-3=2^5+3*5*7=137;$

$2^5*5-3*7=5^2*7-2^2*3^2=139;$

Il primo numero composto che si ottiene è:

$p_{n+1}*p_{n+2}=11*13=143=3^2*5+2*7^2=2^4*5+3^2*7=2^2*5*7+3;$

a4) $p_1=2; p_2=3; p_3=5; p_4=7; p_5=11;$

$5*11-2*3*7=2*3^2*5-7*11=7^3-2*3*5*11=13;$

$5*7\cdot 11-2^3*3^3=2*5*7+3^2*11=13^2;$

$7*11-2^2*3*5=3*5*7-2^3*11=3^3*11-2^3*5*7=3^4*7-2*5^2*11=$

$=2^4*7*11-3^5*5=5*11^2-2^2*3*7^2=17;\quad 5*7*11-2^5*3=17^2;$

$2*7*11-3^3*5=2*3*7^2-5^2*11=5^4*7-2^2*3^2*11^2=2^3*3*11-5*7^2=2*5^3-3*7\cdot 11=19;$

$2*5^2*11-3^3*7=2^3*5*7+3^4=2^4*3*7+5^2=19^2;$

$2*3^2*11-5^2*7=3*5*11^2-2^8*7=2^3*11^2-3^5*5*7=23:$

$3^2*11-2*5*7=2^2*3*7-5*11=29;$

$2*3*11-5*7=5^4-2*3^3*11=2^2*7^2-3\cdot 5*11=2^2*5\cdot 11-3^3*7=3*5*7^2-2^6*11=$

$=2*3^3*5*7-11*13^2=31;$

$2*5*7-3*11=2^5*11-3^2*5*7=5^2*7^2-2^2*3^3*11=2*11^3-3*5^2*7=$

$=7*11^2-2*3^4*5=3*7^2-2*5*11=37;\quad 2^3*3*5*11+7^2=37^2;$

$2^2*5*7-3^2*11=2*5*7*11-3^6=3*5^2*11-2^4*7^2=3*5^2\cdot 7-2^2*11^2=41;$

$2^4*3^4+5*7*11=41^2;$

$5^2*7-2^3*3*11=2^3*3*5-7*11=5*7^2-2^2*3*11=43;\quad 5^3*7*11-2^5*3^5=43^2;$

$2^4*3^3-5*7*11=7*11-2*3*5=2*5*11-3^2*7=3^2*5*11-2^6*7=$

$=5*7^2-2*3^2*11=2^4*3^3-5*7*11=47;$

$3*5*11-2^4*7=2^2*3^2*5^2-7*11^2=2*5^2*7-3^3*11=3^2*7*11-2^7*5=53;$

$2^5*7-3*5*11=3^3*5^2-2^3*7*11=59;$

$3*5*7-2^2*11=2^3*3*5^2-7^2*11=61;$

$3*5*11-2*7^2=3*5^3-2^2*7*11=2*3^4\cdot 11-5*7^3=67;$

$2^4*11-3*5*7=3^2*5^2-2*7*11=2*3^2*7-5*11=2^7*7-3*5^2*11=11^3-2^2*3^2*5*7=71;$

$2*3*5^2-7*11=2^2*5*11-3*7^2=3^2*5*7-2*11^2=73;$

$2*7*11-3*5^2=3^3*7-2*5*11=79;$

$3*5*7-2*11=2^5*7^2-3^3*5*11=83;$

$2*3*5*7-11^2=2*5*11-3*7=7^2*11-2*3^2*5^2=2^3*3*11-5^2*7=89;$

$2*3*7+5*11=5*7*11-2^5*3^2=97;$

$5*11^2-2^3*3^2*7=2*3*11+5*7=101;$

$2^2*3^2*5-7*11=3^2*5*11-2^3*7^2=2*3^3*7-5^2*11=103;$

$2^2*5*7-3*11=5^2*11-2^3*3*7=2*3*5+7*11=107;$

$3*5*11-2^3*7=2*7*11-3^2*5=2*3*7^2*11-5^5=3^2*11^2-2^2*5*7^2=2*5^2*11-3^2*7^2=109;$

$2^3*3*7-5*11=3^3*7^2-2*5*11^2=3^3*5*11-2^2*7^3=113;$

$2*5*7^2-3*11^2=3*5*7+2*11=127;$

$3*5*7*11-2^{10}=5*7^3-2^4*3^2*11=2*5*11+3*7=2^2*7^2*11-3^4*5^2=131;$

$2^2*3*5+7*11=3*5*11-2^2*7=137;$

$3^2*5*7-2^4*11=2*3*5*7^2-11^3=3*5^2*11-2*7^3=139;\quad 3*5*7+2^2*11=149;$

$3*5*11-2*7=2^2*3^2*11-5*7^2=151;\quad 2^2*5*11-3^2*7=3^2*11-2^2*5*7=157;$

$2*3^2*11-5*7=5^4-2\cdot 3*7*11=163;\quad 3^2*5^2*7-2^7*11=2*3^2*5+7*11=167;$

$2^2*5*7+3*11=173;\ 3*5*11+2*7=179;\ 3*7*11-2*5^2=181;$

$5^2*11-2^2*3*7=3^4*11-2^2*5^2*7=191;\ 3*5*7+2^3*11=2*5*7^2-3^3*11=193;$

$2^3*3*5+7*11=197;\ 5^3*11-2^3*3*7^2=199;\ 3*7*11-2^2*5=211;$

Il primo numero composto che si ottiene è:

$p_{n+1}*p_{n+2}=13*17=221=3^2*7^2-2*5*11=2*3*5*7+11;$

a5) $p_1=2; p_2=3; p_3=5; p_4=7; p_5=11; p_6=13;$

$2*7*13-3*5*11=5^3*7-2*3*11*13=5*7^2*13-2^5*3^2*11=17;$

$2^3*5*13-3*7*11=17^2;$

……………………………….. ……………………………. ……………………………

$3*7^2*11-2^2*5^2*13=2*3^3*5*7-11^2*13=2*3^3*13-5*7*11=317;$

Il primo numero composto che si ottiene è:

$p_{n+1}*p_{n+2}=17*19=323;$

a6) $p_1=2; p_2=3; p_3=5; p_4=7; p_5=11; p_6=13; p_7=17;$

$2^2*3*5*17-7*11*13=19;$

………………………………….. ………………………… ……………………………

$2^3*5^2*17-3*7*11*13=397;$

…………………………………. ……………………….. ……………………………

a7) $p_1=2; p_2=3; p_3=5; p_4=7; p_5=11; p_6=13; p_7=17; p_8=19;$

………………………………….. ………………………… …………………………

$3*5*11*19-2*7*13*17=41;\quad 2*5*17*19-3*7*11*13=227;$ …………

$3*5*13*17-2*7*11*19=389;$ ……………………………………………….

$2*7*13*19-3*5*11*17=653;$ …………………………

…………………………………………………………………………………………..

L'importanza della relazione $p = \pi_h^{x_i} \pm \pi_k p_j^{x_j}$ consiste nel fatto che il numero delle sue soluzioni distinte con la condizione: $p < p_{n+1} * p_{n+2}$ è asintoticamente uguale alla somma dei numeri primi fino a p_{n+2} ovvero indicando con $S_{n+2}(p_i)$ la somma dei numeri primi fino a p_{n+2} cioè: $S_{n+2}(p_i) = \Sigma_{i=1}^{n+2} p_i$ e con $\pi(p_n \div p_{n+1} * p_{n+2})$ il numero dei primi tra p_n e $p_{n+1} * p_{n+2}$ si ha: $S_{n+2}(p_i) \sim \pi(p_n \div p_{n+1} * p_{n+2})$ ovvero: $\lim_{n\to\infty}[(\pi(p_n \div p_{n+1} * p_{n+2}))/S_{n+2}(p_i)] = 1$

Si riportano di seguito alcuni esempi:

b1) $p_n = 89; p_{n+1} = 97; p_{n+2} = 101; p_{n+1} * p_{n+2} = 9797;$
$S_{101}(p_i) = \Sigma_{p_i \le 101} p_i = 1161; \pi(89 \div 97 * 101) = 1185; \pi / S = 1185/1161 = 1{,}020672;$

b2) $p_n = 491; p_{n+1} = 499; p_{n+2} = 503; p_{n+1} * p_{n+2} = 499 * 503 = 250997;$
$S_{503}(p_i) = \Sigma_{p_i \le 503} p_i = 22039; \pi(491 \div 499 * 503) = 22022; \pi / S = 22022/22039 = 0{,}999229;$

b3) $p_n = 857; p_{n+1} = 859; p_{n+2} = 863; p_{n+1} * p_{n+2} = 859 * 863 = 741317;$
$S_{863}(p_i) = \Sigma_{p_i \le 863} p_i = 59269; \pi(857 \div 859 * 863) = 59475; \pi / S = 59475/59269 = 1{,}003476;$

b4) $p_n = 1123; p_{n+1} = 1129; p_{n+2} = 1151; p_{n+1} * p_{n+2} = 1129 * 1151 = 1299479;$
$S_{1151}(p_i) = \Sigma_{p_i \le 1151} p_i = 99685; \pi(1123 \div 1129 * 1151) = 99799; \pi / S = 99799/99685 = 1{,}001144;$

b5) $p_n = 1637; p_{n+1} = 1657; p_{n+2} = 1663; p_{n+1} * p_{n+2} = 1657 * 1663 = 2755591;$
$S_{1663}(p_i) = \Sigma_{p_i \le 1663} p_i = 199960; \pi(1637 \div 1657 * 1663) = 200081; \pi / S = 1{,}000605;$

b6) $p_n = 2399; p_{n+1} = 2411; p_{n+2} = 2417; p_{n+1} * p_{n+2} = 2411 * 2417 = 5827387;$
$S_{2417}(p_i) = \Sigma_{p_i \le 2417} p_i = 401188; \pi(2399 \div 2411 * 2417) = 401403; \pi / S = 1{,}000536;$

b7) $p_n = 4133; p_{n+1} = 4139; p_{n+2} = 4153; p_{n+1} * p_{n+2} = 4139 * 4153 = 17189267;$
$S_{4153}(p_i) = \Sigma_{p_i \le 4153} p_i = 1098982; \pi(4133 \div 4139 * 4153) = 1102024; \pi / S = 1{,}002768;$

b8) $p_n = 6271; p_{n+1} = 6277; p_{n+2} = 6287; p_{n+1} * p_{n+2} = 6277 * 6287 = 39463499;$
$S_{6287}(p_i) = \Sigma_{p_i \le 6287} p_i = 2389937; \pi(6271 \div 6277 * 6287) = 2402157; \pi / S = 1{,}005113;$

b9) $p_n = 7723; p_{n+1} = 7727; p_{n+2} = 7741; p_{n+1} * p_{n+2} = 7727 * 7741 = 59814707;$
$S_{7741}(p_i) = \Sigma_{p_i \le 7741} p_i = 3541793; \pi(7723 \div 7727 * 7741) = 3551745; \pi / S = 1{,}002810;$

b10) $p_n = 9059; p_{n+1} = 9067; p_{n+2} = 9091; p_{n+1} * p_{n+2} = 9067 * 9091 = 82428097;$
$S_{9091}(p_i) = \Sigma_{p_i \le 9091} p_i = 4773201; \pi(9059 \div 9067 * 9091) = 4802812; \pi / S = 1{,}006204;$

b11) $p_n = 9839; p_{n+1} = 9851; p_{n+2} = 9857; p_{n+1} * p_{n+2} = 9851 * 9857 = 97101307;$
$S_{9857}(p_i) = \Sigma_{p_i \le 9857} p_i = 5607465; \pi(9839 \div 9851 * 9857) = 5602815; \pi / S = 0{,}999171;$

b12) $p_n = 10007; p_{n+1} = 10009; p_{n+2} = 10037; p_{n+1} * p_{n+2} = 10009 * 10037 = 100460333;$
$S_{10037}(p_i) = \Sigma_{p_i \le 10037} p_i = 5766439; \pi(10007 \div 10009 * 10037) = 5785208; \pi / S = 1{,}003255;$

b13) $p_n = 31601; p_{n+1} = 31607; p_{n+2} = 31627; p_{n+1} * p_{n+2} = 31607 * 31627 = 999634589;$
$S_{31627}(p_i) = \Sigma_{p_i \le 31627} p_i = 50514723; \pi(31601 \div 31607 * 31627) = 50826884; \pi / S = 1{,}006180;$

b14) $p_n = 99989; p_{n+1} = 99991; p_{n+2} = 100003; p_{n+1} * p_{n+2} = 99991 * 100003 = 9999399973;$
$S_{100003}(p_i) = \Sigma_{p_i \le 100003} p_i = 454618385; \pi(99989 \div 99991 * 100003) = 455018035; \pi / S = 1{,}000879;$

Si osservi che sostituendo p_{n+2} con n e $p_{n+1} * p_{n+2}$ con n^2 si può scrivere: $S_n(p_i) \sim \pi(n^2)$
Cioè:la somma dei numeri primi fino ad n è asintoticamente uguale al numero dei primi fino ad n^2.

Consideriamo due esempi con n ed n^2 :

c1) n = 9973 ; $n^2 = 99460729$;

$S_{9973}(p_i) = \Sigma_{p_i \le 9973} p_i = 5736386; \pi(99460729) = 5732120; \pi / S = 5732120/5736386 = 0{,}999256;$

c2) n = 10000 ; $n^2 = 100000000$;

$S_{10000}(p_i) = \Sigma_{p_i \le 10000} p_i = 5736386; \pi(100000000) = 5761418; \pi / S = 5761418/5736386 = 1{,}004364;$

Per gli interi si ha: $S_n(K) = \Sigma_{k=1}^{n} K = (n+1)*(n/2)$ e $\lim_{n \to \infty} [S_n(K)]/n^2 = 1/2;$

Ovvero: la somma dei numeri interi da 1 ad n è asintoticamente uguale alla metà del numero degli interi fino ad n^2.

Si osservi come la somma dei numeri interi da 1 ad n che viene facilmente calcolata come somma dei primi n termini di una progressione aritmetica di ragione 1 e primo termine 1 può essere altrettanto facilmente determinata con la relazione:

$$\int_0^n (x + 1/2) \cdot p(x) \cdot dx$$

Ed essendo,ovviamente, per gli interi $p(x) = 1$,in quanto tale è la probabilità che un numero intero sia intero, si ha:

$$S_n(K) = \int_0^n (x + 1/2) \cdot dx = \left[x^2/2 + x/2\right]_0^n = (n+1)*n/2\,;$$

Possiamo allora,utilizzando la relazione: $S_n(p_i) \sim \pi(n^2)$, ricavare la distribuzione dei numeri primi, cioè dato n determinare il numero dei primi che lo precedono o,analogamente, calcolare la probabilità che scelto a caso un numero intero esso sia primo.

Se indichiamo con $p(t)$ la probabilità che il numero intero t sia primo allora la somma $S_x(p_i)$ dei numeri primi minori o uguali ad x è data da :

$$S_x(p_i) = \int_2^x t \cdot p(t) dt \qquad (1)$$

Mentre il numero dei primi $\pi(x^2)$ minori di x^2 è fornito,in prima approssimazione, da:

$$\pi(x^2) = x^2 * p(x^2) \qquad (2)$$

Dalla relazione: $S_n(p_i) \sim \pi(n^2)$ uguagliando la (1) e la (2) si ha:

$$\int_2^x t \cdot p(t) \cdot dt = x^2 * p(x^2) \qquad (3)$$

La soluzione della (3) è data da:

$$p(x) = K_1/\ln(x) + K_2/\ln^2(x) + K_3/\ln^3(x) + \cdots\cdots + K_n/\ln^n(x) = \Sigma_n K_n \ln^n(x) \qquad (4)$$

a meno di $C_n/\ln^{n+1}(x)$ con:

$$K_1 = 1; \quad K_n = -[(n-1) * K_{n-1}]/[(2^{n-1}-1)]; \quad C_n = -n * K_n/2^n \; ; \qquad (5)$$

Per n = 1 la (4) diventa: $p(x) = 1/\ln(x)$ da cui : $\pi(x) \sim x/\ln(x)$

Una formulazione rigorosa, semplice ed elegante, si ottiene impiegando la funzione integrale per entrambi i membri:

$$\int_2^x t \cdot p(t) \cdot dt = \int_2^{x^2} p(t) \cdot dt \qquad (6)$$

Dove il primo membro è uguale alla somma dei numeri primi da 2 ad x e il secondo membro è il numero dei primi minori di x^2.
Derivando ambo i membri della (6) si ottiene:

$$x * p(x) = 2 * x * p(x^2) \Rightarrow p(x) = 2 * p(x^2) \qquad (7)$$

La cui soluzione esatta è: $p(x) = 1/\ln(x)$ (8)

Abbiamo così dimostrato che il numero dei primi minori o uguali ad n è asintoticamente uguale alla funzione logaritmo integrale Li(n), cioè:

$$\pi(n) \sim Li(n) = \int_2^n [1/\ln(x)] \cdot dx$$

APPENDICE

Consideriamo la relazione: $a + p_i = n$ (1)

con a ed n interi e p_i primo.

Supponiamo n composto e quindi scomponibile in fattori primi:

$$n = p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta} \cdot p_z^{\gamma} \cdot \ldots\ldots \qquad (2)$$

Per il teorema fondamentale dell'aritmetica ogni intero maggiore di 1 si scrive in modo unico,a meno dell'ordine,come prodotto di numeri primi positivi,ovvero:
un numero composto non ammette che una sola decomposizione in fattori primi.

La (1), considerando la (2) si può scrivere:

$$a + p_i = p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta} \cdot p_z^{\gamma} \cdot \ldots\ldots \qquad (3)$$

Per p_i uguale ad uno dei fattori primi di n, ad esempio p_y, a non può essere un numero primo,infatti:

$$a = p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta} \cdot p_z^{\gamma} \cdot .... - p_y = p_y \cdot \left[p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta-1} \cdot p_z^{\gamma} ..... - 1 \right] \qquad (4)$$

Affinché a sia primo deve essere $a = p_y$ e quindi :

$$p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta-1} \cdot p_z^{\gamma} \cdot ..... = 1 \qquad (5)$$

L'equazione (5) non ammette soluzioni,quindi a è composto in quanto contiene p_i, o una sua potenza, ed almeno un altro fattore.

Inoltre a non può contenere nessun altro dei fattori primi di n ; infatti se ne contenesse un'altro,ad esempio p_x, cioè se fosse:

$$a = F \cdot p_x \cdot p_y \qquad (6)$$

si avrebbe:

$$F \cdot p_x \cdot p_y + p_y = p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta} \cdot p_z^{\gamma} \cdot .... \qquad (7)$$

da cui:

$$p_x \cdot \left[p_x^{\alpha-1} \cdot p_y^{\beta-1} \cdot p_z^{\gamma} \cdot ... - F \right] = 1 \qquad (8)$$

Poiché il primo membro della (8) è sempre diverso da 1 l'equazione non ammette soluzioni, quindi a non può contenere nessun altro dei fattori primi di n.

Per p_i diverso da ciascuno dei fattori primi di n , la quantità a o è un numero primo,o si scomporrà in fattori primi tutti diversi da p_i, in quanto se uno dei suoi fattori primi fosse uguale a p_i si avrebbe:

$$p_i \cdot A + p_i = p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta} \cdot p_z^{\gamma} \cdot .... \qquad (9)$$

ovvero:

$$p_i \cdot (A+1) = p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta} \cdot p_z^{\gamma} \cdot ...... \qquad (10)$$

e con ciò l'intero n sarebbe scomponibile in due modi diversi in fattori primi,in contrasto con il teorema fondamentale dell'aritmetica.

E ancora per p_i diverso da ciascuno dei fattori primi di n , nessuno dei fattori primi di n può essere fattore primo di a ; infatti in caso contrario si avrebbe:

$$p_i = -a + p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta} \cdot p_z^{\gamma} \cdot ..... \qquad (11)$$

Ad esempio se uno dei fattori primi di a fosse p_z si avrebbe:

$$p_i = -p_z \cdot U + p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta} \cdot p_z^{\gamma} \cdot .... = p_z \cdot \left[p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta} \cdot p_z^{\gamma-1} \cdot .. - U \right] \qquad (12)$$

dando luogo ad un assurdo.

Abbiamo quindi dimostrato che la validità della relazione: $a + p_i = n$ implica che l'intero a o contiene uno solo dei fattori primi di n e precisamente p_i, per p_i uguale ad uno

dei fattori primi di ***n*** *, o non ne contiene nessuno, per valori di* p_i *diversi dai fattori primi di* ***n**, nel qual caso* ***a*** *non può contenere* p_i *tra i suoi fattori primi.*

Indicando con I_x l'insieme dei fattori primi del numero intero x, in base a quanto sopra, possiamo enunciare il seguente teorema:

Teorema 1 : Dati un intero n composto,un numero primo p_i e un intero a :

$$a + p_i = n \Rightarrow I_a \cap I_{n \cdot pi} = I_n \cap I_{pi} \qquad (13)$$

Consideriamo ora un intero n e un numero primo $p_i < n$

In base al teorema 1, la quantità $n-p_i$ o contiene uno solo dei fattori primi di n e precisamente p_i, eventualmente con molteplicità q , nel caso in cui p_i è uno dei fattori primi di n, o non ne contiene nessuno,nel caso in cui p_i è diverso da tutti i fattori primi di n.

Pertanto,considerando tutti i numeri primi p_i che precedono n le quantità $n - p_i$ sono tutte residui di n, escluse quelle nelle quali p_i è uno dei fattori primi di n.

La funzione $\phi(A)$ di Eulero è definita come il numero degli interi,da 1 ad (A -1), primi rispetto all'intero A .
Per un numero composto A, i cui fattori primi siano: a,b,c,……,indipendentemente dalla loro molteplicità:

$$\phi(A) = A \cdot (1 - 1/a) \cdot (1 - 1/b) \cdot (1 - 1/c) \cdot .... \qquad (14)$$

Consideriamo ora la quantità $n - x_i$ con x_i intero minore di n.

Se x_i contiene fattori primi di $n = 2 \cdot p_x^\alpha \cdot p_y^\beta \cdot p_z^\gamma \cdot ...$, ad esempio $p_x . p_y$, e quindi non appartiene all'insieme dei residui di n, si avrà:

$$n - x_i = p_x \cdot p_y \cdot \left[p_x^{\alpha-1} \cdot p_y^{\beta-1} \cdot p_z^\gamma \cdot .... - h \right] \qquad (15)$$

perciò anche $(n - x_i)$ li contiene e non può appartenere ai residui di n.
Viceversa se x_i non contiene fattori primi di n , e quindi appartiene all'insieme dei residui di n, la quantità $(n - x_i)$ non può contenere nessuno dei fattori primi di n, e pertanto appartiene all'insieme dei residui di n.

Infatti se li contenesse,se fosse ad esempio $(n - x_i) = B \cdot p_z$ si avrebbe:

$$x_i + (n - x_i) = n \Rightarrow x_i + p_z \cdot B = p_x^\alpha \cdot p_y^\beta \cdot p_z^\gamma \cdot .... \Rightarrow$$

$$x_i = p_z \cdot (p_x^\alpha \cdot p_y^\beta \cdot p_z^\gamma \cdot ...... - B) \qquad (16)$$

in contrasto con il teorema fondamentale dell'aritmetica,in quanto il primo membro sarebbe scomponibile in modo diverso dal secondo.

Inoltre se x_i non contiene fattori primi di n, la quantità ($n-x_i$) non solo non può contenere nessuno dei fattori primi di n, ma anche nessuno dei fattori primi di x_i ;

infatti se ne contenesse uno,ad esempio p_u si avrebbe:

$$x_i = p_u . G; \qquad n - x_i = p_u . L \tag{17}$$

$$x_i + n - x_i = p_u .(G + L) = p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta} \cdot p_z^{\gamma} \cdot \ldots\ldots \tag{18}$$

In contrasto col teorema fondamentale dell'aritmetica.

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema :

Teorema 2: dati due interi n ed y composti ed un intero x :

$$x + y = n \Rightarrow I_x \cap I_{n.y} = I_n \cap I_y \tag{19}$$

Pagina pubblicata il 04-01-2006

Autore

Prof. Santo Giovanni Torrisi
Contact: *sgtorrisi@virgilio.it*

Dirigente del Liceo Scientifico " C. Caminiti " di S.Teresa di Riva (ME)