Goldbach Conjecture – A synthesis of the research results.

Let $N = 2 \cdot n$ be an even number larger than two.
N can be represented in the form:

$$N = 2 \cdot n = 2^{\gamma} \cdot p_1^{y_1} \cdot p_2^{y_2} \cdot p_3^{y_3} \cdot p_4^{y_4} \cdots\cdots\cdots p_{m-1}^{y_{m-1}} \qquad (\Omega_1)$$

The result of the research I made has given a formula that provides the number of Goldbach partitions of $2 \cdot n$: $S_p(2 \cdot n)$, when the order of two primes is not important:

$$S_p(2 \cdot n) = \left[1/\left(\pi^2/8\right)\cdot(1-\alpha)\right]^{1/(1-x)} \cdot [\pi(n) - m] \cdot [\pi(2 \cdot n) - \pi(n)]/(1/2)\cdot \varphi(2 \cdot n) \qquad (\Omega_2)$$

Where:
m : number of prime factors of $2 \cdot n$;
$\pi(n)$: number of primes less than n;
$\pi(2 \cdot n)$: numbers of primes less than $2 \cdot n$;
$\varphi(2 \cdot n)$: number of the residues of $2 \cdot n$ that according to the Euler theorem is:

$$\varphi(2 \cdot n) = n \cdot \Pi_{i=1}^{m-1}(p_i - 1)/p_i \qquad (\Omega_3)$$

$$x = r/n = (1/2)\cdot[\varphi(2 \cdot n)]/n = (1/2)\cdot \Pi_{i=1}^{m-1}(p_i - 1)/p_i; \qquad 0 < x \le 1/2 \qquad (\Omega_4)$$

$$r = (1/2)\cdot \varphi(2 \cdot n);$$

$$\alpha = \sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{k+1} \cdot S(k); \qquad (\Omega_5)$$

$$S(k) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 < \dots\dots < i_k \le m-1} (1/p_{i_1})^2 \cdot (1/p_{i_2})^2 \cdot (1/p_{i_3})^2 \cdots\cdots (1/p_{i_k})^2 \qquad (\Omega_6)$$

$$0 \le \alpha < \left(\pi^2/8 - 1\right)$$

α gets the zero value only for $N = 2 \cdot n = 2^{\gamma}$

$$\left[\left(\pi^2/8\right)\cdot(1-\alpha)\right]^{-1} \qquad (\Omega_7)$$

it is the value that the function $1/\zeta_r(2)$, reciprocal of the Euler function $\zeta_r(2)$, gets when it is calculated only with the residues of the number I:

$$I = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots\cdots p_{m-1} \cdot p_I \qquad (\Omega_8)$$

where p_I is a prime number much larger than each of the primes p_i and anyway infinitely large.
We want to remind that Euler $\zeta(x)$ function is given by:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^x = 1 + 1/2^x + 1/3^x + 1/4^x + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (\Omega_9)$$

That when x = 2 it gets the value:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2 = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \pi^2/6 \qquad (\Omega_{10})$$

If we used only odd numbers we would get:

$$\zeta_d(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} 1/d^2 = 1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots = \pi^2/8 \qquad (\Omega_{11})$$

$S_p(2 \cdot n)$ can be finally expressed in the form:

$$S_p(2 \cdot n) = \left[1/\left(\pi^2/8\right)\cdot(1-\alpha)\right]^{1/(1-x)} \cdot \{2 \cdot [\pi(n) - m] \cdot [\pi(2 \cdot n) - \pi(n)]/n\} \cdot \prod_{i=1}^{m-1} p_i/(p_i - 1)$$

La Congettura di Goldbach

Introduzione

Per ogni numero pari N>2, esistono due numeri primi,non necessariamente distinti, p_i e p_j, tali che:

$$N = p_i + p_j \qquad (1)$$

Consideriamo un intero n e un numero primo p_i tale che:

$$3 \le p_i < n \qquad (2)$$

Sia x_j il simmetrico di p_i rispetto ad n in un riferimento cartesiano su una retta $\vec{r}$.

Si potrà scrivere: $x_j = n + n - p_i = 2 \cdot n - p_i$ (3)

Se x_j è primo,cioè se $x_j = p_j$ allora avremo:

$$p_i + p_j = 2 \cdot n \qquad (4)$$

Abbiamo in tal caso individuato due numeri primi p_i e p_j tali che la loro somma è uguale al numero pari $N = 2 \cdot n$
Due numeri primi che soddisfino la (4) costituiscono una **“ coppia di Goldbach “ o “Partizione di Goldbach “**

In generale se dato un qualunque numero pari $2 \cdot n$, esiste almeno un p_i tale che il suo simmetrico rispetto ad n è primo la congettura di Goldbach è dimostrata.

Viceversa se $p_i + p_j = 2 \cdot n$, con $p_j > p_i$ allora p_j è il simmetrico di p_i rispetto ad n.

Consideriamo ora la relazione: $a + p_i = 2 \cdot n$ (5)
con a ed n interi , p_i primo ed $n \ne p_i$
Per $n = p_i$ si avrebbe il caso banale $a + p_i = 2 \cdot p_i$ da cui $a = p_i$
che in seguito non prenderemo in considerazione,anche se l’opzione opposta non sarebbe esclusa stante la formulazione della congettura : ….“ **esistono due numeri primi non necessariamente distinti** “. Supponiamo n composto e quindi scomponibile in fattori primi:

$$n = p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta} \cdot p_z^{\gamma} \cdot ...... \qquad (6)$$

Per il teorema fondamentale dell’aritmetica ogni intero maggiore di 1 si scrive in modo unico,a meno dell’ordine,come prodotto di numeri primi positivi,ovvero:
un numero composto non ammette che una sola decomposizione in fattori primi.
La (5), considerando la (6) si può scrivere:

$$a + p_i = 2 \cdot p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta} \cdot p_z^{\gamma} \cdot .... \qquad (7)$$

Per p_i uguale ad uno dei fattori primi di n, ad esempio p_y, a non può essere un numero primo,infatti:

$$a = 2 \cdot p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta} \cdot p_z^{\gamma} \cdot .... - p_y = p_y \cdot \left[2 \cdot p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta-1} \cdot p_z^{\gamma} ..... -1\right] \qquad (8)$$

Affinché a sia primo deve essere $a = p_y$ e quindi :

$$p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta-1} \cdot p_z^{\gamma} \cdot ..... = 1 \qquad (9)$$

L'equazione (9) non ammette soluzioni,quindi a è composto in quanto contiene p_i o una sua potenza ed almeno un altro fattore.
Inoltre a non può contenere nessun altro dei fattori primi di n ; infatti se ne contenesse un'altro,ad esempio p_x , cioè se fosse: $a = F \cdot p_x \cdot p_y$ (10)
si avrebbe: $F \cdot p_x \cdot p_y + p_y = 2 \cdot p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta} \cdot p_z^{\gamma} \cdot \ldots\ldots\ldots$ (11)
Da cui: $p_x \cdot \left[2 \cdot p_x^{\alpha-1} \cdot p_y^{\beta-1} \cdot p_z^{\gamma} \cdot \ldots - F\right] = 1$ (12)

Poiché il primo membro della (12) è sempre diverso da 1 l'equazione non ammette soluzioni, quindi a non può contenere nessun altro dei fattori primi di n

Per p_i diverso da ciascuno dei fattori primi di n , la quantità a o è un numero primo,o si scomporrà in fattori primi tutti diversi da p_i , in quanto se uno dei suoi fattori primi fosse uguale a p_i si avrebbe:

$$p_i \cdot A + p_i = 2 \cdot p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta} \cdot p_z^{\gamma} \cdot \ldots. \quad (13)$$

ovvero: $p_i.(A+1) = 2 \cdot p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta} \cdot p_z^{\gamma} \cdot \ldots\ldots$ (14)

e con ciò l'intero $2 \cdot n$ sarebbe scomponibile in due modi diversi in fattori primi,in contrasto con il teorema fondamentale dell'aritmetica.
E ancora per p_i diverso da ciascuno dei fattori primi di n , nessuno dei fattori primi di n può essere fattore primo di a ; infatti in caso contrario si avrebbe:

$$p_i = -a + 2 \cdot p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta} \cdot p_z^{\gamma} \cdot \ldots.. \quad (15)$$

Ad esempio se uno dei fattori primi di a fosse p_z si avrebbe:

$$p_i = -p_z . U + 2 \cdot p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta} \cdot p_z^{\gamma} \cdot \ldots. = p_z \cdot \left[2 \cdot p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta} \cdot p_z^{\gamma-1} \cdot .. - U\right] \quad (16)$$

dando luogo ad un assurdo.

Abbiamo quindi dimostrato che la validità della relazione: $a + p_i = 2 \cdot n$ implica che l'intero a o contiene uno solo dei fattori primi di n e precisamente p_i, per p_i uguale ad uno dei fattori primi di n , o non ne contiene nessuno, per valori di p_i diversi dai fattori primi di n, nel qual caso a non può contenere p_i tra i suoi fattori primi.

Indicando con I_x l'insieme dei fattori primi del numero intero x, in base a quanto sopra, possiamo enunciare il seguente teorema:

Teorema 1 : Dati un intero n composto,un numero primo p_i e un intero a :

$$a + p_i = 2 \cdot n \Rightarrow I_a \cap I_{n \cdot pi} = I_n \cap I_{pi}$$

Consideriamo ora un intero n e un numero primo $p_i < n$
Il simmetrico di p_i rispetto ad n è: $2 \cdot n - p_i$ Consideriamo ancora tutti i numeri primi che soddisfano la (2) ed i relativi simmetrici rispetto ad n: $p_i \Rightarrow 2 \cdot n - p_i$ (17)
Osserviamo che se nella (5) poniamo: $a = 2 \cdot n - p_i$, si avrà:

$$2 \cdot n - p_i + p_i = 2 \cdot n \quad (18)$$

La quantità $(2 \cdot n - p_i)$ è soluzione della (18) per qualunque valore di p_i

In base al teorema (1), la quantità $(2 \cdot n - p_i)$ o contiene uno solo dei fattori primi di n e precisamente p_i, eventualmente con molteplicità q , nel caso in cui p_i è uno dei fattori primi di n, o non ne contiene nessuno,nel caso in cui p_i è diverso da tutti i fattori primi di n.

Pertanto,considerando tutti i numeri primi p_i che precedono n con $p_i \neq 2$, **le quantità** $2 \cdot n - p_i$ **sono tutte residui di** $2 \cdot n$, **escluse quelle nelle quali p_i è uno dei fattori primi di n.**

La funzione $\phi(A)$ di Eulero è definita come il numero degli interi,da 1 ad (A -1), primi rispetto all'intero A . Per un numero composto A, i cui fattori primi siano: a,b,c,……,indipendentemente dalla loro molteplicità:

$$\phi(A) = A \cdot (1 - 1/a) \cdot (1 - 1/b) \cdot (1 - 1/c) \cdot ....$$

Consideriamo ora la quantità $2 \cdot n - x_i$ con x_i intero minore di n.
Se x_i contiene fattori primi di $2 \cdot n = 2 \cdot p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta} \cdot p_z^{\gamma} \cdot ...$, ad esempio $p_x . p_y$, e quindi non appartiene all'insieme dei residui di $2 \cdot n$, si avrà:

$$2 \cdot n - x_i = p_x \cdot p_y \cdot \left[2 \cdot p_x^{\alpha-1} \cdot p_y^{\beta-1} \cdot p_z^{\gamma} \cdot .... - h\right] \qquad (19)$$

perciò anche $(2 \cdot n - x_i)$ li contiene e non può appartenere ai residui di $2 \cdot n$
Viceversa se x_i non contiene fattori primi di $2 \cdot n$, e quindi appartiene all'insieme dei residui di $2 \cdot n$, la quantità $(2 \cdot n - x_i)$ non può contenere nessuno dei fattori primi di $2 \cdot n$, e pertanto appartiene all'insieme dei residui di $2 \cdot n$; infatti se li contenesse,se fosse ad esempio $(2 \cdot n - x_i)$ = $B \cdot p_z$ si avrebbe: $x_i + (2 \cdot n - x_i) = 2 \cdot n \Rightarrow x_i + p_z \cdot B = 2 \cdot p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta} \cdot p_z^{\gamma} \cdot .... \Rightarrow$

$$x_i = p_z \cdot \left(2 \cdot p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta} \cdot p_z^{\gamma} \cdot ...... - B\right) \qquad (20)$$

in contrasto con il teorema fondamentale dell'aritmetica,in quanto il primo membro sarebbe scomponibile in modo diverso dal secondo.
Pertanto,considerato che la quantità $(2 \cdot n - x_i)$ è un residuo di $2 \cdot n$ se e solo se x_i è un residuo di $2 \cdot n$, tutti i residui di 2.n compresi tra n e 2.n ,sono i simmetrici di tutti i residui di 2.n minori di n. Per ciascun residuo r_1 ed il suo simmetrico rispetto ad n , r_2 si ha,per quanto sopra, $r_1 + r_2 = 2 \cdot n$
In definitiva sull'insieme dei residui di 2.n si può effettuare una partizione in due sottoinsiemi I_A e I_B tale che ciascun elemento di I_B è il simmetrico di uno ed uno solo degli elementi di I_A . Possiamo enunciare quindi il seguente teorema:

Teorema 2:

Sull'insieme dei residui dell'intero 2.n esiste una applicazione biiettiva f : $I_A \rightarrow I_B$ tra il sottoinsieme I_A degli elementi tra n e 2.n e quello I_B degli elementi minori di n con:
$r_2 = 2.n - r_1$; $0 < r_1 < n$ ed $n < r_2$; $r_1 \in I_A$ ed $r_2 \in I_B$
Inoltre se x_i non contiene fattori primi di 2.n , la quantità $2.n-x_i$ non solo non può contenere nessuno dei fattori primi di 2.n , ma anche nessuno dei fattori primi di x_i ;
infatti se ne contenesse uno,ad esempio p_u si avrebbe:
$x_i = p_u . G$; $2.n-x_i = p_u . L$
$x_i + 2.n-x_i = p_u.(G + L) = 2 \cdot p_x^{\alpha} \cdot p_y^{\beta} \cdot p_z^{\gamma} \cdot ......$
In contrasto col teorema fondamentale dell'aritmetica
Possiamo quindi enunciare il seguente teorema :
Teorema 3: dati due interi n ed y composti ed un intero x :

$$x + y = 2 \cdot n \Rightarrow I_x \cap I_{2 \cdot n \cdot y} = I_{2 \cdot n} \cap I_y$$

Determinazione della molteplicità delle Partizioni di Goldbach

Dato un intero $2 \cdot n$, ci proponiamo di determinare la molteplicità delle coppie di Goldbach. .
Indichiamo con $\Phi(2 \cdot n)$ la cardinalità dei residui di $2 \cdot n$ e con $r = [\Phi(2 \cdot n)]/2$ quella dei residui di $2 \cdot n$ compresi tra n e $2 \cdot n$; **r contiene tutti i numeri primi tra** n **e** $2 \cdot n$

Indichiamo con n_p il numero dei primi minori di n; i loro simmetrici rispetto ad n sono n_p e sono tutti residui di $2 \cdot n$,eccetto quelli corrispondenti ai fattori primi di $2 \cdot n$ il cui numero indichiamo con m . Indichiamo poi con n_o il numero dei primi tra n e $2 \cdot n$
Consideriamo le due matrici colonna: la prima i cui elementi sono gli r residui di $2 \cdot n$ compresi tra 1 ed n; la seconda i cui elementi sono gli r residui di $2 \cdot n$ compresi tra n e $2 \cdot n$.
Gli elementi della seconda matrice sono i simmetrici,rispetto ad n,degli elementi della prima.

Quando, mediante l'applicazione biiettiva $f: I_A \rightarrow I_B$ si determina il simmetrico di un elemento della prima colonna si potranno verificare i seguenti casi:

1^ma^ Colonna		**2^a^ Colonna**	
primo	→	**primo**	$\mathbf{s_p}$
	→	**composto**	$\mathbf{s_n}$
composto	→	**primo**	$\mathbf{r_p}$
	→	**composto**	$\mathbf{r_n}$

fig. 1

- Indichiamo con s_p un residuo primo della seconda colonna generato dalla trasformazione di residuo primo della prima colonna
- con s_n un residuo composto della seconda colonna generato dalla trasformazione di un residuo primo della prima colonna
- con r_p un residuo primo della seconda colonna generato da un residuo composto della prima
- con r_n un residuo composto della seconda colonna generato da un residuo composto della prima

s_p, s_n, r_p, r_n rappresentano,quindi,i possibili esiti della trasformazione : $f: I_A \rightarrow I_B$ di un residuo qualunque della prima colonna in uno della seconda e costituiscono,pertanto,lo spazio **S** di una sola trasformazione : $\mathbf{S} = \{ s_p, s_n, r_p, r_n \}$
Con *lettere* maiuscole affette da indici minuscoli: $\mathbf{S_p}$, $\mathbf{S_n}$, $\mathbf{R_p}$, $\mathbf{R_n}$ indicheremo, rispettivamente, la cardinalità degli $\mathbf{s_p}$, $\mathbf{s_n}$, $\mathbf{r_p}$, $\mathbf{r_n}$ generati dalle trasformazioni di tutti i residui della prima colonna in altrettanti residui della seconda, per un dato N = 2.n
In base alle posizioni fatte :

$$R_p + S_p = n_o \qquad (21)$$
$$S_n + R_n = r - n_o \qquad (22)$$
$$S_p + S_n = n_p - m \qquad (23)$$

$$R_p + R_n = r - n_{p} + m \qquad (24)$$

Risolvendo il sistema delle quattro equazioni precedenti e scegliendo R_n come variabile indipendente,stante la interdipendenza delle equazioni medesime,si ottiene:

$$\begin{aligned} S_n &= r - n_o - R_n \\ S_p &= n_o + n_p + R_n - r - m \\ R_p &= r + m - n_p - R_n \end{aligned} \qquad (25)$$

Considerando che gli elementi della prima colonna costituiscono una successione crescente e quelli della seconda una successione decrescente ,con semplici considerazioni di tipo combinatorio, è immediato determinare R_n :

$$R_n = (r - n_p + m) \cdot (r - n_o) / r \qquad (26)$$

Con lo stesso procedimento seguito per la determinazione di R_n possiamo ricavare anche le espressioni di S_p, S_n ed R_p
Le espressioni delle quattro grandezze interessate sono:

$$\begin{aligned} S_p &= (n_p - m) \cdot n_o / r \quad ; \quad R_n = (r - n_p + m) \cdot (r - n_o) / r \\ S_n &= (n_p - m) \cdot (r - n_o) / r \quad ; \quad R_p = (r - n_p + m) \cdot n_o / r \end{aligned} \qquad (27)$$

La somma delle quattro grandezze, fornite dalle espressioni (27), risulta, necessariamente, uguale ad r.

D'altra parte dalle (25) nota R_n si possono determinare le altre tre grandezze le cui espressioni risultano identiche a quelle fornite dalle (27).

Dobbiamo ora tener conto del fatto che i numeri delle due colonne, giacenti sulla stessa riga,in base al teorema 2, non possono possedere fattori comuni.

Occorre quindi determinare il numero delle coppie di numeri composti che presentando fattori comuni deve essere sottratto al risultato fornito dalla (26).

Sappiamo che $S_p = R_n + n_o + n_p - r - m$

Osserviamo ora che:

$$S_p = 0 \Rightarrow R_n = r - n_o - n_p + m$$

Quindi $$R_n(S_p = 0) = r - n_o - n_p + m \qquad (28)$$

La (28) può essere espressa nel modo seguente:

$$R_n(S_p = 0) = r \cdot (r - n_o - n_p + m)/r \qquad (29)$$

La (29) presenta la stessa forma della (26) di seguito riportata:

$$R_n = (r - n_p + m) \cdot (r - n_o)/r$$

Con la differenza che in essa ,tutti i numeri primi vengono attribuiti ad una colonna e l'altra rimane virtualmente formata da numeri tutti composti.

Cioè se si immagina di trasportare tutti i numeri primi di una delle due colonne nell'altra, sostituendoli nei posti lasciati liberi con numeri composti, il valore di

$$R_n(S_p = 0) = r \cdot (r - n_o - n_p + m)/r$$

è tale che S_p dalla relazione:

$$S_p = R_n + n_o + n_p - r - m$$

è nullo. **Quindi la massima interdipendenza tra i numeri composti delle due colonne si ha quando ad una delle due vengono attribuiti anche i numeri primi dell'altra**.

Calcolando la differenza $\Delta R_n = R_n - R_n(S_p = 0)$ otteniamo:

$$\Delta R_n = n_o \cdot (n_p - m)/r \qquad (30)$$

esattamente uguale al valore di S_p .

A questo punto introduciamo la variabile x = r/n > 0 per $\forall$ n.
Consideriamo ancora la funzione $\xi(2)$ di Eulero calcolata con i soli residui di n che indicheremo con $\xi_r(2)$.

Ricordiamo che : $\xi(x) = \Sigma_{a=1}^{\infty} 1/a^x$ con a intero.

Come è noto, $\xi(2) = \pi^2/6$, mentre $\xi_r(2) = \xi_d(2) - \beta = (\pi^2/8 - \beta)$, avendo indicato con $\xi_d(2)$ la funzione ξ di Eulero calcolata con i numeri dispari .
Dal valore di $\xi_d(2) = \pi^2/8$ dobbiamo sottrarre,infatti, la sommatoria dei quadrati dei reciproci dei multipli dei fattori primi di n che abbiamo indicato con β ,ovvero la sommatoria dei quadrati dei reciproci degli interi che presentano fattori in comune con n.
A questo punto,con semplici considerazioni di calcolo combinatorio, è immediato determinare il numero di fattori comuni che cercavamo, che indichiamo con f_c e precisamente:

$$f_c = \left\{1 - \left[1/\left(\pi^2/8-\beta\right)\right]^{x^o} \cdot \left[1/\left(\pi^2/8-\beta\right)\right]^{x} \cdot \left[1/\left(\pi^2/8-\beta\right)\right]^{x^2} \cdots \left[1/\left(\pi^2/8-\beta\right)\right]^{x^r}\right\} \cdot \left(n_p - m\right) \cdot n_o / r =$$

$$f_c = \left\{1 - \left[1/\left(\pi^2/8-\beta\right)\right]^{1+x+x^2+\cdots\cdots+x^r}\right\} \cdot \left(n_p - m\right) \cdot n_o / r =$$

$$f_c = \left\{1 - \left[1/\left(\pi^2/8-\beta\right)\right]^{\left[\left(1-x^r\right)/\left(1-x\right)\right]}\right\} \cdot \left(n_p - m\right) \cdot n_o / r$$

che per $r \to \infty$ diventa:

$$f_c = \left\{1 - \left[1/\left(\pi^2/8-\beta\right)\right]^{\left[1/\left(1-x\right)\right]}\right\} \cdot \left(n_p - m\right) \cdot n_o / r \qquad (31)$$

Poiché $\Delta S_p = \Delta R_n = f_c$ il valore S_p sarà:

$$S_p = S_p - \Delta S_p = S_p - \Delta R_n = \left(n_p - m\right) \cdot n_o / r - \left\{1 - \left[1/\left(\pi^2/8-\beta\right)\right]^{1/\left(1-x\right)}\right\} \cdot \left(n_p - m\right) \cdot n_o / r \qquad (32)$$

La (32) ci fornisce il valore esatto S_p del numero delle coppie o partizioni di Goldbach.

Semplificando si ha:

$$S_p = \left[1/\left(\pi^2/8-\beta\right)\right]^{1/\left(1-x\right)} \cdot \left(n_p - m\right) \cdot n_o / r \qquad (33)$$

Si osservi che $S_p > 0$ per qualunque valore di n.

Dalla (33) per n primo si ha: x = r/n $\cong$ 1/2 e $\beta = 0$, per cui:

$$S_p = \left(8/\pi^2\right)^2 \cdot \left(n_p - m\right) \cdot n_o / r \qquad (34)$$

Invece per $x \to 0 \Rightarrow \left(\pi^2/8-\beta\right) \to 1 \Rightarrow S_p \to \left(n_p - m\right) \cdot n_o / r \to n_o$ (35)

Per un generico intero n è valida,quindi,la seguente relazione:

$$\left(8/\pi^2\right)^2 \cdot \left(n_p - m\right) \cdot n_o / r \le S_p < n_o \qquad (36)$$

Indicando con $\pi(n)$ il numero dei primi minori di n e con $\pi(2 \cdot n)$ il numero dei primi minori di $2 \cdot n$ e tenendo presente l'espressione di r la (33) si può scrivere:

$$S_p(2 \cdot n) = \left[1/\left(\pi^2/8-\beta\right)\right]^{1/\left(1-x\right)} \cdot \left[\pi(n) - m\right] \cdot \left[\pi(2 \cdot n) - \pi(n)\right] / \left(1/2\right) \cdot \varphi(2 \cdot n) \qquad (37)$$

Vogliamo ricavare ora una relazione per β.

Supponiamo in un primo momento che il numero N sia del tipo $N = 2 \cdot n = 2^{\gamma} \cdot p_1^{y_1}$, si avrà in tal caso:

$$\beta = 1/p_1^2 + 1/(3 \cdot p_1)^2 + 1/(5 \cdot p_1)^2 + 1/(7 \cdot p_1)^2 + 1/(9 \cdot p_1)^2 + \dots\dots + 1/(d \cdot p_1)^2 + \dots\dots =$$

$$= \left(1/p_1^2\right) \cdot \left(1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + 1/9^2 + \dots\dots + 1/d^2 + \dots\dots\right) = \left(1/p_1^2\right) \cdot \pi^2 / 8 \qquad (38)$$

Ponendo : $\beta = \alpha \cdot \pi^2 / 8$ si ha: $\alpha = 1/p_1^2$ (39)

Per $N = 2 \cdot n = 2^{\gamma}\, p_1^{y_1} \cdot p_2^2$ applicando il principio di inclusione –esclusione si ha:

$$\alpha = (1/p_1)^2 + (1/p_2)^2 - (1/p_1 \cdot p_2)^2$$

Per un qualsiasi $N = 2 \cdot n$:

$$N = 2 \cdot n = 2^{\gamma} \cdot p_1^{y_1} \cdot p_2^{y_2} \cdot p_3^{y_3} \cdot p_4^{y_4} \cdots\cdots p_{m-1}^{y_{m-1}} \qquad (40)$$

Applicando il principio di inclusione – esclusione nella sua forma generale si ottiene:

$$\alpha = \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k+1} \cdot S(k); \qquad (41)$$

con: $S(k) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 < \dots\dots < i_k \le m-1} \left(1/p_{i_1}\right)^2 \cdot \left(1/p_{i_2}\right)^2 \cdot \left(1/p_{i_3}\right)^2 \cdots\cdots \left(1/p_{i_k}\right)^2;$ (42)

$S_p(2 \cdot n)$ può così essere espresso nella forma:

$$S_p(2 \cdot n) = \left[1/(\pi^2/8) \cdot (1-\alpha)\right]^{1/(1-x)} \cdot [\pi(n) - m] \cdot [\pi(2 \cdot n) - \pi(n)] / (1/2) \cdot \varphi(2 \cdot n) \qquad (43)$$

o in maniera equivalente:

$$S_p(2 \cdot n) = \left[1/(\pi^2/8) \cdot (1-\alpha)\right]^{1/(1-x)} \cdot \{2 \cdot [\pi(n) - m] \cdot [\pi(2 \cdot n) - \pi(n)] / n\} \cdot \prod_{i=1}^{m-1} p_i / (p_i - 1); \qquad (44)$$

Some Examples

n.° 1

$N = 2 \cdot n = 2 \cdot 49335 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23$
$\pi(n) = 5069; \quad \pi(2 \cdot n) = 9473; \quad \pi(2 \cdot n) - \pi(n) = 4404; \quad \varphi(2 \cdot n) = 21120; \quad \mathrm{m} = 6$
$r = (1/2) \cdot \varphi(2 \cdot n) = 10560; \quad x = r / n = 0{,}214047$

$$\alpha = 1/3^2 + 1/5^2 + 1/11^2 + 1/13^2 + 1/23^2 - 1/(3 \cdot 5)^2 - 1/(3 \cdot 11)^2 - 1/(3 \cdot 13)^2 - 1/(3 \cdot 23)^2 - 1/(5 \cdot 11)^2 - 1/(5 \cdot 13)^2 +$$
$$-1/(5 \cdot 23)^2 - 1/(11 \cdot 13)^2 - 1/(11 \cdot 23)^2 - 1/(13 \cdot 23)^2 + 1/(3 \cdot 5 \cdot 11)^2 + 1/(3 \cdot 5 \cdot 13)^2 + 1/(3 \cdot 5 \cdot 23)^2 + 1/(5 \cdot 11 \cdot 13)^2 +$$
$$+1/(5 \cdot 11 \cdot 23)^2 + 1/(5 \cdot 13 \cdot 23)^2 + 1/(11 \cdot 13 \cdot 23)^2 + 1/(3 \cdot 11 \cdot 13)^2 + 1/(3 \cdot 11 \cdot 23)^2 + 1/(3 \cdot 13 \cdot 23)^2 - 1/(3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13)^2 +$$
$$-1/(3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23)^2 - 1/(3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 23)^2 - 1/(3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23)^2 - 1/(5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23)^2 + 1/(3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23)^2 = 0{,}16035018$$

$S_p(x, \alpha, ...) = \left[1/(\pi^2/8) \cdot (1 - 0{,}16035018)\right]^{1/(1-0{,}214047)} \cdot 5063 \cdot 4404 / 10560 = 2019; \quad S_{ptrue} = 1999;$
$S_p(x, \alpha, ..) / S_{ptrue} = 1{,}010005$

n.° 2

$N = 2 \cdot n = 2 \cdot 100698 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 1291$
$\pi(n) = 9650; \quad \pi(2 \cdot n) = 18089; \quad \pi(2 \cdot n) - \pi(n) = 8439; \quad m = 4; \quad \varphi(2 \cdot n) = 61920;$
$r = (1/2) \cdot \varphi(2 \cdot n) = 30960; \quad x = r / n = 0{,}307454;$

$$\alpha = 1/3^2 + 1/13^2 + 1/1291^2 - 1/(3 \cdot 13)^2 - 1/(3 \cdot 1291)^2 - 1/(13 \cdot 1291)^2 + 1/(3 \cdot 13 \cdot 1291)^2 = 0{,}116371;$$

$S_p(201396) = \left[1/(\pi^2/8) \cdot (1 - 0{,}116371)\right]^{1/(1-0{,}307454)} \cdot (9650 - 4) \cdot 8439 / 30960 = 2321;$
$S_{ptrue} = 2316; \qquad S_p(x, \alpha, ..) / S_{ptrue} = 1{,}002159$

n° 3

$N = 2 \cdot n = 2 \cdot 255255 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$
$\pi(n) = 22466; \quad \pi(2 \cdot n) = 42331; \quad \pi(2 \cdot n) - \pi(n) = 19865; \quad \varphi(2 \cdot n) = 92160; \quad \mathrm{m} = 7;$
$r = (1/2) \cdot \varphi(2 \cdot n) = 46080; \quad x = r / n = 0{,}180525;$

$$\alpha = 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + 1/11^2 + 1/13^2 + 1/17^2 - 1/(3 \cdot 5)^2 - 1/(3 \cdot 7)^2 - 1/(3 \cdot 11)^2 - 1/(3 \cdot 13)^2 - 1/(3 \cdot 17)^2 +$$
$$-1/(5 \cdot 7)^2 - 1/(5 \cdot 11)^2 - 1/(5 \cdot 13)^2 - 1/(5 \cdot 17)^2 - 1/(7 \cdot 11)^2 - 1/(7 \cdot 13)^2 - 1/(7 \cdot 17)^2 - 1/(11 \cdot 13)^2 - 1/(11 \cdot 17)^2 +$$
$$-1/(13 \cdot 17)^2 + 1/(3 \cdot 5 \cdot 7)^2 + 1/(3 \cdot 5 \cdot 11)^2 + 1/(3 \cdot 5 \cdot 13)^2 + 1/(3 \cdot 5 \cdot 17)^2 + 1/(3 \cdot 7 \cdot 11)^2 + 1/(3 \cdot 7 \cdot 13)^2 + 1/(3 \cdot 7 \cdot 17)^2$$
$$+1/(3 \cdot 11 \cdot 13)^2 + 1/(3 \cdot 1117)^2 + 1/(3 \cdot 13 \cdot 17)^2 + 1/(5 \cdot 7 \cdot 11)^2 + 1/(5 \cdot 7 \cdot 13)^2 + 1/(5 \cdot 7 \cdot 17)^2 + 1/(5 \cdot 11 \cdot 13)^2 +$$
$$+1/(5 \cdot 11 \cdot 17)^2 + 1/(5 \cdot 13 \cdot 17)^2 + 1/(7 \cdot 11 \cdot 13)^2 + 1/(7 \cdot 11 \cdot 17)^2 + 1/(7 \cdot 13 \cdot 17)^2 + 1/(11 \cdot 13 \cdot 17)^2 - 1/(3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11)^2 +$$
$$-1/(3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13)^2 - 1/(3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17)^2 - 1/(3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13)^2 - 1/(3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17)^2 - 1/(3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17)^2 - 1/(3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13)^2 +$$
$$-1/(3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17)^2 - 1/(3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17)^2 - 1/(3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17)^2 - 1/(5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13)^2 - 1/(5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17)^2 - 1/(5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17)^2 +$$
$$-1/(5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17)^2 - 1/(7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17)^2 + 1/(3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13)^2 + 1/(3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17)^2 + 1/(3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17)^2 +$$
$$+1/(3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17)^2 + 1/(3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17)^2 + 1/(5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17)^2 - 1/(3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17)^2 = 0{,}17874316$$

$S_p(2 \cdot 255255) = \left[1/(\pi^2/8) \cdot (1 - 0{,}17874316)\right]^{1/(1-0{,}18052536)} \cdot (22466 - 7) \cdot 19865 / 46080 = 9528$
$S_p(x, \alpha ..) = 9528; \qquad S_{ptrue} = 9489; \qquad S_p(x, \alpha ..) / S_{ptrue} = 1{,}004110$

n.° 4

$N = 2 \cdot n = 2^{19} = 524288$

$\pi(n) = 23000\,;\quad \pi(2 \cdot n) = 43390\,;\quad \pi(2 \cdot n) - \pi(n) = 20390\,;\quad \varphi(2 \cdot n) = 262144\,;\ \ \mathrm{m} = 1$

$r = (1/2) \cdot \varphi(2 \cdot n) = 131072\,;\quad x = r/n = 0{,}5\,;\quad \alpha = 0$

$S_p(x, \alpha, ...) = (8/\pi^2)^2 \cdot (23000 - 1) \cdot 20390/131072 = 2351\,;\ S_{ptrue} = 2378\,;$

$S_p(x, \alpha, ..)/S_{ptrue} = 1{,}011484$

n.° 5

$N = 2 \cdot n = 2 \cdot 268171$

$\pi(n) = 23500;\quad \pi(2 \cdot n) = 44298\,;\quad \pi(2 \cdot n) - \pi(n) = 20798\,;$ **m = 2;**

$\varphi(536342) = 268170\,;\quad \mathrm{r} = 134085;\quad \mathrm{x} = 0{,}499998 \cong 0{,}5\,;\quad \alpha = 1/(268171^2) = 1{,}390517 \cdot 10^{-11} \cong 0$

$S_p(2 \cdot 268171) = S_p(x, \alpha, ..) = (8/\pi^2)^2 \cdot (23500 - 2) \cdot 20798/134085 = 2395$

$S_{ptrue} = 2409;\qquad S_p(x, \alpha, ..)/S_{ptrue} = 0{,}994188\,;\qquad S_{ptrue}/S_p(x, \alpha..) = 1{,}005846$

n.° 6

$N = 2 \cdot 268185 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 941$

$\pi(n) = 23500\,;\ \ \pi(2 \cdot n) = 44300\,;\qquad \pi(2 \cdot n) - \pi(n) = 20800\,;\ \ \mathrm{m} = 5;\ \ \varphi(536370) = 135360\,;$

r = 67680; x = 0,252363;

$\alpha = 1/3^2 + 1/5^2 + 1/19^2 + 1/941^2 - 1/(3 \cdot 5)^2 - 1/(3 \cdot 19)^2 - 1/(3 \cdot 941)^2 - 1/(5 \cdot 19)^2 - 1/(5 \cdot 941)^2 - 1/(19 \cdot 941)^2 +$
$+ 1/(3 \cdot 5 \cdot 19)^2 + 1/(3 \cdot 5 \cdot 941)^2 + 1/(3 \cdot 19 \cdot 941)^2 + 1/(5 \cdot 19 \cdot 941)^2 - 1/(3 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 941)^2 = 0{,}14902934\,;$

$S_p(x, \alpha, ..) = 6748;\qquad S_{ptrue} = 6733;\qquad S_p(x, \alpha, ..)/S_{ptrue} = 6748/6733 = 1{,}002228;$

Autore : ***Prof. Santo Giovanni Torrisi***
Contact: *sgtorrisi@virgilio.it*
Dirigente del Liceo Scientifico " C. Caminiti " di S.Teresa di Riva (ME)